

彰化縣民權華德福  
實驗國民中小學  
教學分享

~與我們一起實踐善美真~

Wayne

Wayne

Wayne

Wayne



# 數理主課程-畢氏定理四千年

七年級松柏班授課老師 范雅婷老師

整個七年級的課程為學生們揭示了一個新的世界，它往往也會和他們在就讀較低年級時所遇到過的主題聯繫起來(探索之路，2002)。在9月的主課程，帶領學生利用扣條拚扣出三角形家族，除了複習舊經驗以外，藉此埋下了畢氏定理的伏筆-特定的三邊長可以形成直角三角形。

## 一、古希臘畢氏定理

11月進行兩週的畢氏定理主課程，藉由古希臘的鼎盛時期作為序幕，以說故事的方式介紹畢達哥拉斯的生平簡介，到了他建立兄弟會的劇情時，情境指引學生彷彿當時在其中的哲學家般，看著磁磚討論著直角三角形的秘密(圖1)。直到發現了「在直角三角形中，夾直角的兩邊所作的兩正方形面積之和等於斜邊所作的正方形面積。」並且引導他們使用自己的話簡要說明畢氏定理的內容，這個部分大概花了兩節課的時間，從自己想到老師指定必須使用「股、斜邊、平方」這三個詞彙產出畢氏定理的(圖2)。

學生發想出的內容創意無比(像是直角三角形中雙股平方和等於斜邊平方)，以後設認知的方式學習，更能加深學生對畢氏定理的內容，最後才加入代數符號 $a^2 + b^2 = c^2$ 為此定理用數學的方式深刻之。這是數學思想上的一大進步，從此以後，它便在幾何學的各方面起著主導作用，甚至後來的哲學家克卜勒也說道：「畢氏定理是幾何學上的黃金。」

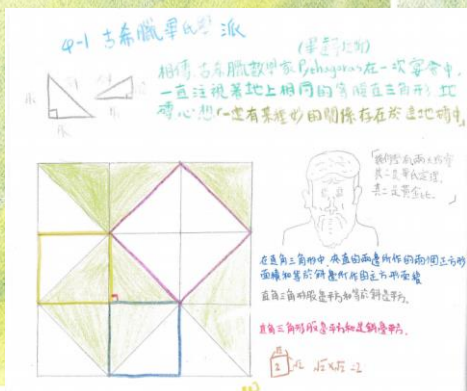


圖 1

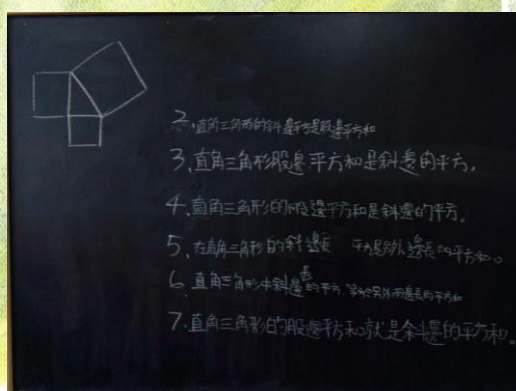


圖 2

## 二、第一次數學危機-無理數的發現

等學生們熟悉畢氏定理之後，告訴他們軼事中畢達哥拉斯的學生西帕索斯的故事，討論面積為2平方單位的邊長應該是多少，並用圖像表徵的方式(圖3)計算到小



數點後第 4 位，其平方值最逼近 2，學生發現沒有一個完整的數值平方為 2。這種數字就叫做「不可公約數」也就是「無理數」，因此為了表示面積為 2 的正方形邊長，數學家有了一段沒有統一的表示方法，直到現在所使用的 $\sqrt{\quad}$ （根號的符號史）。

這堂課除了讓學生了解根號的意義( $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$ )也讓學生用自己的方法推算 $\sqrt{2}$ (十分逼近法)。藉由無理數的出現，了解為何在崇尚萬物皆數的時代造成一時的恐慌。最後統整至今學過所有各式各樣的數，並整理出實數系的架構。

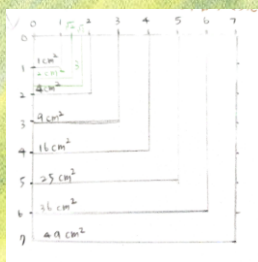


圖 3

### 三、畢氏定理的發展史

畢氏定理發展四千年，自美索不達米亞 YBC7289 泥板、古希臘畢氏定理、周髀算經商高定理，每個時代都有發現直角三角形的特性的證據，歐幾里得是第一位使用代數證明畢氏定理的數學家，後人也深深著迷此的定理除了使用不同的形式歌頌它外，更是創造出許許多不同的證明方法。

在這段課程中，學生透過 YBC7289 泥板知道，藉由畢氏三元數可以知道其所有相似形的計算，例如  $1:1:\sqrt{2} = 2:2:2\sqrt{2}$ 。

### 四、寓教於藝-根號 N 螺旋

藝術是在奠基對科學的一種精神，當學生能把畢氏定理抽象概念昇華成藝術之美時，這一部分的學習就已經進入到他人生的一環中了。感謝林口國中 李政憲老師所提供的根號 N 螺旋教案，學生更能體會畢氏定理的美(圖 4)。

最後透過心智圖，讓學生們回顧自己所學的內容並加以整理成這兩周學習的重點摘要。(圖 5)





圖 4



圖 5

課程花絮影片連結: [https://youtu.be/0AGwu\\_0Aw9Y](https://youtu.be/0AGwu_0Aw9Y)

參考資料:

Eli Maor / 畢氏定理四千年

林口國中 李政憲老師 / 根號 N 螺旋

艾瑞克·費曼雪/探索之路

歐幾里得/幾何原本